S E N S 2 0 0 9
Fifth Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, NANOTECHNOLOGY, SAFETY
2–4 November 2009, Sofia, Bulgaria

УСИЛВАНЕ НА БАВНИ МАГНИТОЗВУКОВИ ВЪЛНИ ОТ СРЯЗВАЩ ПОТОК: МЕХАНИЗЪМ ЗА НАГРЯВАНЕ И ВИСКОЗИТЕТ НА АКРЕЦИОННИТЕ ДИСКОВЕ

Златан Димитров, Яна Манева, Тихомир Христов,Тодор Мишонов

Софийски Университет "Св. Климент Охридски",
Физически факултет, Катедра теоретична физика,
e-mail: zlatan.dimitrov@gmail.com, yanamaneva@gmail.com, tihomir.hristov@jhu.edu,
tmishonov@phys.uni-sofia.bg

Ключови думи: *МХД вълни, срязващ поток, акреционни дискове, квазари*

Абстракт: *Намерени са аналитични решения за магнитохидродинамични (МХД) вълни с малка амплитуда разпространяващи се в срязващ поток от идеален несвиваем флуид. Магнитното поле, налягането и скоростта се представят с помощта на решение на ефективното уравнение на Шрьодингер и се изразяват чрез конфлуентната функция на Хойн. Най-важната отличителна черта на решението е значителното усилване на дългите магнитозвукови вълни; получена е и проста интерполационна формула за коефицента на усилване. Това усилване е ефективен механизъм на трансформация на енергията на срязващия поток във вълнова енергия. Изказва се хипотезата, че полученото решение може да намери приложение във физиката на горещата плазма на слабо замагнитените акреционни дискове. Всяка усилена вълна се поглъща при ненулев вискозитет и анализираното усилване на вълните, навярно, разкрива дълго търсения механизъм за нагряване на акреционните дискове и възникването на голям ефективен вискозитет обясняващ нагряването; така една отдавнашна загадка е вероятно решена. Изказва се предположението, че полученото решение може да бъде в основата на вълновата турбулентност.*

AMPLIFICATION OF SLOW MAGNETOSONIC WAVES BY SHEAR FLOW: HEATING AND FRICTION MECHANISMS OF ACCRETION DISKS

Zlatan Dimitrov, Yana Maneva, Tihomir Hristov, Todor Mishonov

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics,
University of Sofia "St. Clement of Ohrid",
e-mail: zlatan.dimitrov@gmail.com, yanamaneva@gmail.com, tihomir.hristov@jhu.edu,
tmishonov@phys.uni-sofia.bg

Въведение

Вече повече от 50 години проблемът за момента на количеството на движение е възлов проблем на космогонията, за който се нуждаем от привличане на нови идеи. Както е добре известно в нашата слънчева система 98% от ъгловия момент е свързан с орбиталното движение на планетите, а 700 пъти по-тежкото слънце има едва 2% от момента. Още с първите телескопи се вижда, че нашето слънце се върти много бавно – така че въпросът е не дали *тя* се върти, а защо *то* не се върти – кой спря нашето слънце да се върти – това е един от централните въпроси на фундаменталната физика изобщо. Как акреционният диск действа като дискова спирачка, как тя се нагрява от триенето, какъв е механизмът на светенето на най-мощните източници на светлина във Вселената – квазарите, всички тези въпроси трябва да намерят своя отговор в рамките на магнитната хидродинамика, която описва едромащабните свойства на космическата плазма.

Ключов детайл за разбирането на тези въпроси е откритото с помощта на числен анализ усилване на бавните магнитозвукови вълни.[1] Това усилване на линеаризирани магнитохидродинамични вълни (МХД) от срязващ поток бе потвърдено и в други изследвания посветени на физиката на акреционните дискове и МХД на космическата плазма.[2] Общи сведения за физиката на дисковете могат да бъдат намерени в обзорите [3]. Цел на настоящата работа е да се изведат аналитичниформули за МХД променливи, описващи вълните, а също така удобна интерполационна формула за коефициента на усилване на вълновата енергия. Анализирано е мястото на получените резултати в цялостната картина за възникване на ефективен вискозитет в срязващ МХД поток.

Модел

Горещата плазма на акреционния диск предполагаме слабо замагнитена и Алфеновата скорост V_A е много по-малка от скоростта на звука c_s. При тези условия Алфеновите и бавните магнитозвукови вълни (БМВ) могат да се разглеждат като вълни в несвиваем флуид с нулева дивергенция на скоростта $\nabla.\mathbf{V}=0$. При високи температури омовото съпротивление c_Ω е пренебрежимо и магнитният вискозитет ν_m е много по-малък от кинематичния ν_k.

(1) $$\nu_m=\varepsilon_0 c^2 c_\Omega=\frac{e^2c^2m_e^{1/2}L_e}{0.6\times 4\pi T_e^{3/2}}, \quad \nu_k=\frac{\eta}{\rho}=\frac{0.4T_p^{5/2}}{e^4 n_p M_p^{1/2} L_p}, \qquad \rho=M_p m_p$$

(2) $$L_p=\ln\left(\frac{\lambda_D T_p}{e^2}\right),\quad L_e=\ln\left(\frac{\lambda_D T_e}{e^2}\right),\quad \frac{1}{\lambda_D^2}=4\pi e^2\left(\frac{N_e}{T_e}+\frac{N_p}{T_p}\right),\quad e^2=\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Тук използваме самоизясняващи се означения за параметрите на водородна плазма: масите на електрона m_e и протона M_p, броя на електроните n_e и протоните n_p на единица обем, плътността ρ и вискозитета η , електронната T_e и протонна температура T_p, кулоновите логаритми L_e и L_p, дебаевата дължина на екраниране λ_D и коефициента пред кулоновото взаимодействие e^2. За определеност по-нататък ще приравним $T_e=T_p$, а поради голямата числена стойност на магнитното число на Прандтл ν_k/ν_m ще пренебрегнем ефектите, свързани с омовото нагряване. Нашата стартова точка са уравненията на МХД

(3) $$\rho D_t\mathbf{V}=-\nabla P+\left(\mathbf{j}=\frac{\nabla\times\mathbf{B}}{\mu_0}\right)\times\mathbf{B}+\eta\nabla^2\mathbf{V},$$

(4) $$D_t\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{V},$$

където $D_t=\partial_t+\mathbf{V}\cdot\nabla$ е субстанциалната производна, P е налягането, а $\mathbf{j}$ е плътността на тока. Както отбелязахме локалната Алфеновата скорост V_A е много по-малка от местната скорост на разпространение на звука c_s

(5) $$V_A=\frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho}} \ll c_s=\sqrt{\frac{c_p}{c_v}\frac{P}{\rho}},\qquad \frac{c_p}{c_v}=\frac{5}{3}.$$

В линеаризираните МХД уравнения за вълни с малка амплитуда ще считаме, че скоростта и магнитното поле са реалните части от комплексните полета $\mathbf{V}$ и $\mathbf{B}$. Избираме локална координатна система, свързана с цилиндричните координати на диска, като z е оста на въртене на акреционния диск

(6) $$(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)=(\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_z).$$

За магнитното поле предполагаме, че доминира постоянната азимуталната компонента B_0 успоредна на скоростта на Кеплеровото въртене на плазмата около акрецираща компактен обект. Използваме движеща се координатна система за която при някакъв фиксиран радиус азимуталната компонента на скоростта на флуида се занулява. Орбиталната скорост $v_\varphi\equiv v_y$ зависи от радиуса и така възниква градиент на скоростта, описан чрез параметъра на срязване A:

(7) $$\mathbf{V}=Ax\mathbf{e}_y+iV_A\mathbf{v}(\tau)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},\qquad v\ll 1,$$

(8) $$\mathbf{B} = -B_0\mathbf{e}_y + B_0\mathbf{b}(\tau)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \qquad b \ll 1,$$

(9) $$\mathbf{k} = -k_y\tau\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z, \qquad \tau \equiv At.$$

След линеризиране на уравненията на движение ур. (3) получаваме следната система обикновени диференциални уравнения [1]

(10) $$d_\tau v_x = 2\frac{K_yK_x}{K^2}v_x - K_yb_x - v_k' K^2 v_x, \qquad d_\tau b_x = K_y v_x,$$

(11) $$d_\tau v_z = 2\frac{K_yK_z}{K^2}v_x - K_yb_z - v_k' K^2 v_z, \qquad d_\tau b_z = K_y v_z,$$

(12) $$\mathbf{K}\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{K}\cdot\mathbf{b} = 0,$$

където е въведен безразмерният вълнов вектор $\mathbf{K} = V_A\mathbf{k}/A$, и неговата постоянна проекция $Q = \sqrt{K_y^2 + K_z^2}$. Подробен извод е даден в работи [4] и [5]. Задачата се редуцира до решаването на ефективно уравнение на Шрьодингер с безразмерна координата $\xi = \tau K_y/Q$ и ефективен потенциал

(13) $$\frac{2m}{\hbar^2}U(\xi) = \frac{1}{(1+\xi^2)^2}.$$

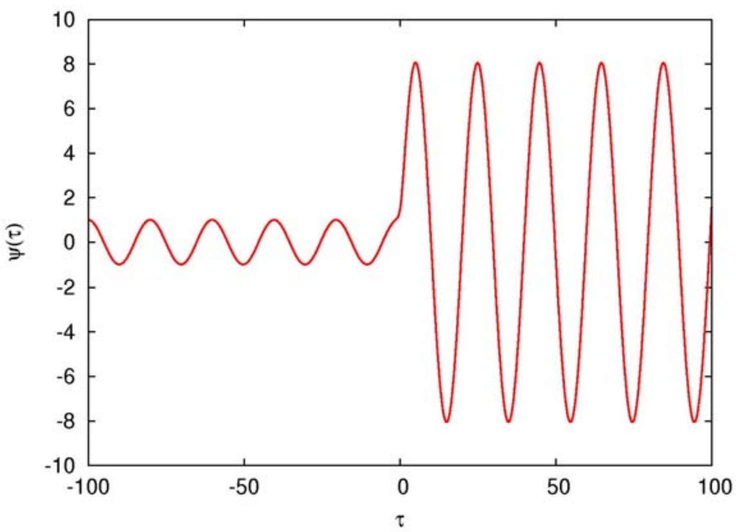
Решение

Ефективното уравнение на Шрьодингер ур. (14) решението на което се изразява като линейна комбинация на четна $\psi_g(\xi)$ и нечетна $\psi_u(\xi)$ функция, съдържащи конфлуентните функции на Хойн

(14) $$d_\xi^2\psi + \left[Q^2 - \frac{1}{(1+\xi^2)^2}\right]\psi = 0, \quad \psi(\xi) = C_g\psi_g(\xi) + C_u\psi_u(\xi),$$

(15) $$\psi_g = \sqrt{1+\xi^2}\, HeunC\left(0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{Q^2}{4}, \frac{1+Q^2}{4}, -\xi^2\right),$$

(16) $$\psi_u = \xi\sqrt{1+\xi^2}\, HeunC\left(0, +\frac{1}{2}, 0, -\frac{Q^2}{4}, \frac{1+Q^2}{4}, -\xi^2\right).$$



Фиг. 1. Решение на ефективното уравнение на Шрьодингер за $\psi(-100) = 1, d_\tau\psi(-100) = 0,$ и $Q = \sqrt{0.1}$.*При* $\tau = 0$ се наблюдава почти скокообразно нарастване на амплитудата на осцилациите което е свързано с усилването на БМВ.

Едно типично решение е показано на фиг. 1. Чрез тези функции се изразява безразмерното магнитно поле

(17) $$b_x = \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}, \qquad \chi(\xi) \equiv \tilde{C}_g \cos(Q\xi) + \tilde{C}_u \frac{\sin(Q\xi)}{Q},$$

(18) $$b_y = -\frac{2K_z^2}{K_y Q}\int_{-\infty}^{\xi} \sin[Q(\xi-\xi')]\frac{v_x(\xi')}{1+\xi'^2}d\xi' + \frac{Q}{K_y}\frac{\xi\psi(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{K_z}{K_y}\chi(\xi),$$

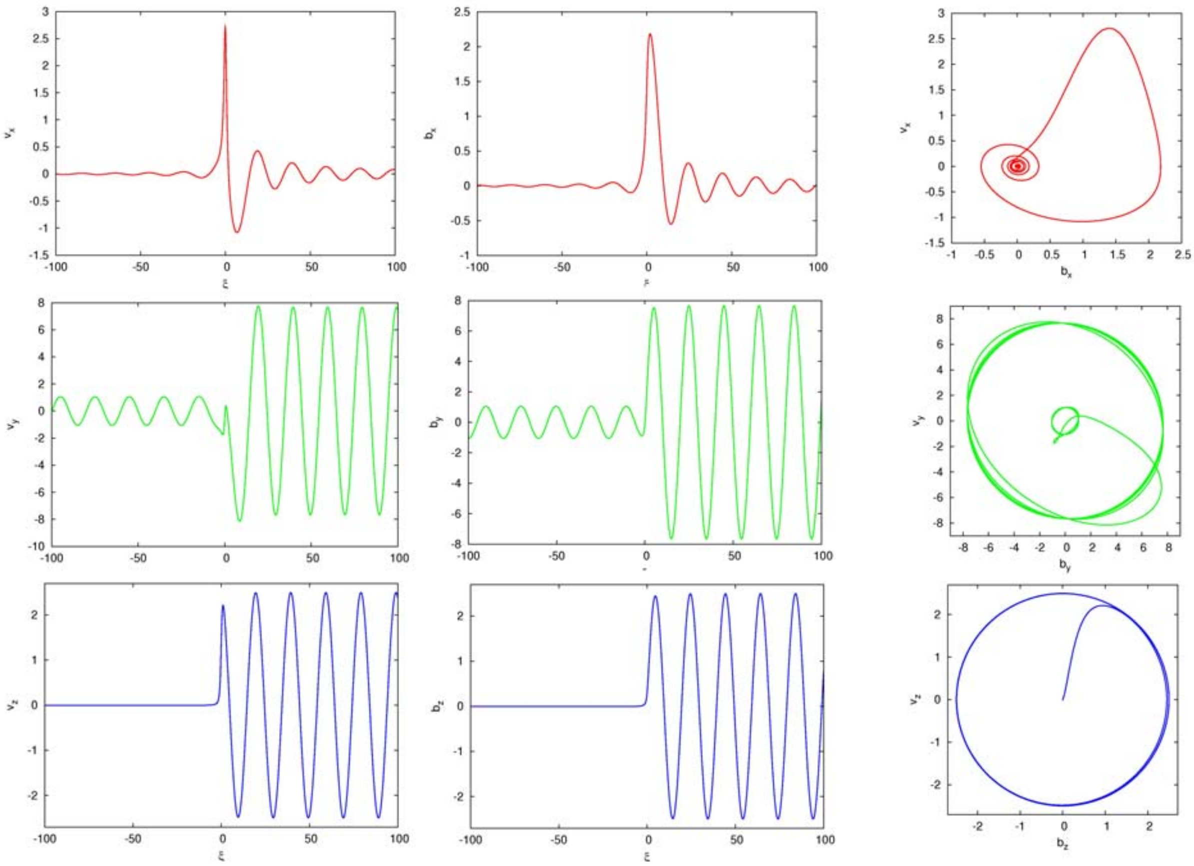
(19) $$b_z = \frac{2K_z}{Q}\int_{-\infty}^{\xi} \sin[Q(\xi-\xi')]\frac{v_x(\xi')}{1+\xi'^2}d\xi' + \chi(\xi).$$

При пренебрежимо омово съпротивление на гореща плазма условието за замразеност на силовите линии на магнитната индукция във флуида $d_\xi \mathbf{b} = Q\mathbf{v}$, изразява скоростта чрез магнитното поле

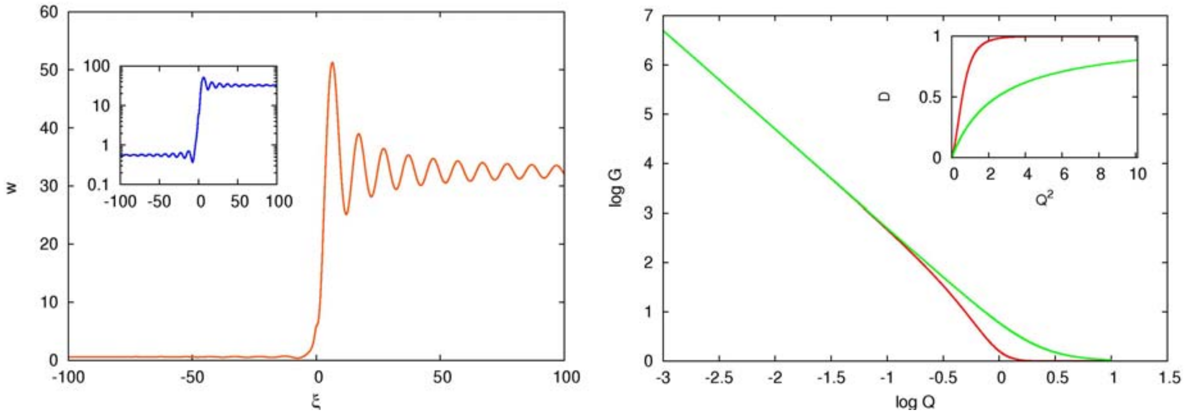
(20) $$v_x = \frac{(1+\xi^2)d_\xi\psi(\xi) - \xi\psi(\xi)}{Q(1+\xi^2)^{3/2}},$$

(21) $$v_y = -\frac{2K_z^2}{K_y Q}\int_{-\infty}^{\xi} \cos[Q(\xi-\xi')]\frac{v_x(\xi')}{1+\xi'^2}d\xi' + \frac{\xi(1+\xi^2)d_\xi\psi(\xi) - \xi^2\psi(\xi)}{K_y(1+\xi^2)^{3/2}} - \frac{K_z}{QK_y}d_\xi\chi(\xi),$$

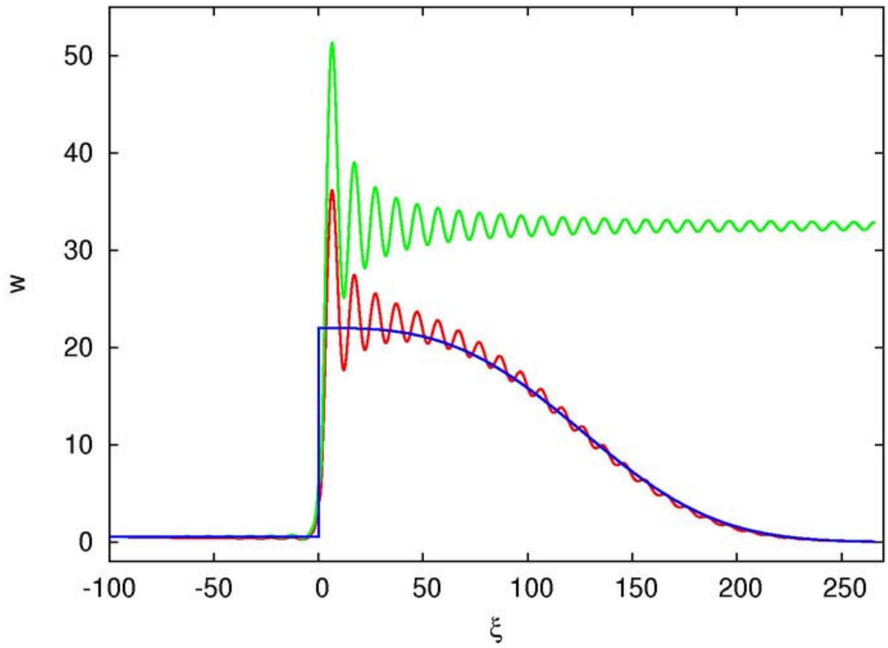
(22) $$v_z = \frac{2K_z}{Q}\int_{-\infty}^{\xi} \cos[Q(\xi-\xi')]\frac{v_x(\xi')}{1+\xi'^2}d\xi' + \frac{d_\xi\chi}{Q}.$$



Фиг. 2. Скорост $\mathbf{v}(\xi)$, магнитното поле $\mathbf{b}(\xi)$ и фазови портрети на радиалните $e_r = e_x$ (горният ред), азимуталнте $e_\varphi = e_y$ (средният ред) и аксиалните $e_z = e_z$ (долният ред) компоненти на полетата. Площта на асимптотичните цикли е пропорционална на енергията на всяка от компонентите. Увеличението на площта на азимуталната компонента (v_y, b_y) описва усилването на БМВ.



Фиг. 3. *Ляво*: Енергия на вълната като функция на времето. На врязаната фигура енертията на вълната е показана в логаритмичен мащаб. *Дясно*: Десетичен логаритъм от коефициентът на усилване на вълните като функция от логаритъма на вълновия вектор. Простата асимптотична формула ур. (24) (дясната крива) точно описва дълговълновата асимптота на аналитичното решение.



Фиг. 4. Вълнова енергия като функция на времето със затихващи пулсации около средната стойност. Показано е влиянието на вискозитета, който води до затихване на вълните и нагряване на плазмата.

Огъващата крива съответства на $\exp\left[-\int \nu k^2(t)\, dt\right]$.

На фиг. 2 са показани аналитичните решения, съответстващи на началните условия:

(23) $\psi(-100)=1, \quad d_\xi\psi(-100)=0, \quad \chi(-\infty)=0=d_\xi\chi(-\infty), \quad K_y=0.3, \quad K_z=0.1 \quad Q=\sqrt{0.1}$.

За радиалното движение скоростта и магнитното поле започват при $\xi=-\infty$ и завършват при $\xi=\infty$ с нулеви стойности. Само в момента на усилване имаме значими радиални компоненти (v_x, b_x). За азимуталното движение (v_y, b_y), което описваБМВ, предполагаме начална амплитуда, която се усилва от срязващия поток. Това е основната отличителна черта на явлението което изследваме. Аксиалните компоненти (v_z, b_z), които описват Алфенови вълни(АВ), не се усилват при $\xi=-\infty$ те имат нулева стойност. Ненулевата площ на асиптотичния цикъл в равнината (v_z, b_z) съответства на конверсията на БМВ в АВ. Отношението на безразмерната плътност на вълновата енергия $w = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^2 + \mathbf{b}^2)$ при $\xi = \infty$ и $\xi = -\infty$ описва усилването на вълната $G = w(\infty)/w(-\infty)$. Една типична времева зависимост на плътността на вълновата енергия $w(\xi)$ е представена на фиг. 3 (ляво). В дясно на същата фигура са придставени асиптотичната формула за усилване при големи дължини на вълната

(24) $$G(Q \ll 1) \approx \frac{\pi^2}{2Q^2} + 1 = \frac{\pi^2}{2} \frac{A^2}{V_A^2 (k_\varphi^2 + k_z^2)} + 1 \gg 1$$

и точното решение. Формално тази асимптотика се свежда до приложението на метода на δ-образния потенциал и замяната

(25) $$\frac{1}{(1+\xi^2)^2} \to \pi\delta(\xi)$$

в ефективното уравнение на Шрьодингер ур. (14). Нека уточним, че параметърът на срязване, който участва във формулата за усилване ур. (24) е равен на половината от ъгловата скорост на орбиталното движение

(26) $$A = -\frac{1}{2}\omega_{Kepler}.$$

Наличието на малък вискозитет води до затихване на вълните с допълнителен множител $\exp\left[-\int \nu k^2(t)\, dt\right]$ който води до времева зависимот на амплитудата

(27) $$\psi \approx D_f\, \theta(\xi) \cos(Q\xi + \phi_f) \exp\left(-\nu' K_y^2 \tau^3/3\right), \qquad \nu' \ll 1.$$

Влиянието на вискозитета върху вълните е илюстрирано на фиг. 4, където са показани две решения с нулев и ненулев вискозитет, както и проста огъваща експоненциална функция. Нека добавим няколко думи за възможната турбулентност, свързана с вълните и тяхното нелинейно взаимодействие. Ако в сценария на Колмогоров постулираме постоянна мощност на единица маса ε за турбулентната конвекция, то този параметър дава оценка за порядъка на пулсациите на скоростта V_λ на две частици от плазмата на разстояние λ. Разглежданата вълнова задача има характерен размер Λ и на него съответства пулсация на скоростта V_λ. Чрез тази пулсация на скоростта V_λ и скоростта на звука c_s може да се изрази [5] α_{ss} параметъра на Шакура-Сюняев:

(28) $$\varepsilon = \frac{V_\lambda^2}{\lambda/V_\lambda}, \quad V_\lambda = (\varepsilon\lambda)^{1/3}, \quad \Lambda = V_A/A, \quad V_{\lambda=\Lambda} = (\varepsilon V_A/A)^{1/3}, \quad \alpha_{ss} = \frac{\sigma_{k\varphi}}{p} \sim \frac{V_\lambda^2}{c_s^2} \sim (\varepsilon V_A/A)^{2/3}/c_s^2.$$

Накратко – усилвателят на вълни работи и като усилвател на турбулентност, но едва сега след аналитичното решение на линеаризираната вълнова задача може да се построи теория на самосъгласуваната спектрална плътност на вълните.

Дискусия и перспективи

Защо квазарите светят, а звездите се въртят толкова бавно? Причината е възникване на голям ефективен вискозитет. Не е учудващо, че гравитационното привличане ускорява потоци от космическа плазма и че енергията на всяка вълна в крайна сметка се превръща в топлина. До сега липсващото звено в тази енергетична каскада бе усилването на бавните магнитозвукови вълни в срязващ поток – доминиращият механизъм за трансформация на кинетичната енергия на срязващия поток във вълнова енергия. За тази енергетична трансформация ние получихме аналитични резултати, които отварят перспективата за построяване на самосъгласувана теория на спектралната плътност на вълните, т.е. теория на слабата турбулентност. Изследването на нелинейния член $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ от уравнението на Навие–Стокс ще опише как две усилени вълни пораждат трета и как грубо казано работи машината за звезди.

Благодарности

Авторите благодарят на проф. И. Желязков за критичното прочитане на ръкописа. Настоящата работа е частично финансирана от Софийския университет “Св. Климент Охридски” по договор за научни изследвания 236-2009 г.

Литература:

1. C h a g e l i s h v i l i G. D. , R. G. C h a n i s h v i l i, T. S. K h r i s t o v, and J. G. L o m i n a d z e. *Mechanism of energy transformations in shear magnetohydrodynamic flows Phys. Rev.* E **47**, 366–374 (1993); T. S. Khristov, *Evolution of Perturbations in Flows with Transient Gradient of the Velocity,* Ph.D. Thesis, advisor G. D. Chagelishvili, Space Research Institute, Sofia, 1992 (in Bulgarian); These first results for shear amplification of MHD waves were reported on a conference in Telavi, Georgia, and appeared as G. D. Chagelishvili, R. G. Chanishvili, L. G. Filipov, T. S. Hristov, and J. G. Lominadze, *Amplification of Alfvén Waves in Free Shear Flows* in *Proceedings of the Joint Varenna-Abastumani-ESA-Nagoya-Potsdam International Workshop on Plasma Astrophysics, Telavi, Georgia, 4–12 June 1990*, *ESA SP-311*, European Space Agency, F-75738 Paris Cedex 15, August 1990, pp. 147–152; *Advances in Space Research* **11**, No. 8, Pergamon Press, Oxford, 1991, pp. (8)61–(8)65.
2. R o g a v a A. D. , S. M. M a h a j a n, G. B o d o, and S. M a s s a g l i a. *Swirling astrophysical flows – Efficient amplifiers of Alfvén waves!?, A&A* **399**, 421–431 (2003); arXiv:astro-ph/0212132 (Dec. 2002), Eq. (31); G. Gogoberidze, G. D. Chagelishvili, R. Z. Sagdeev, and D. G. Lominadze, *Linear coupling and overreflection phenomena of magnetohydrodynamic waves in smoot shear flow, Phys. Plasmas* **11**, pp. 4672–4685 (2004), Eq. (88).
3. B a l b u s S. A. and J. F. H a w l e y. *Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks, Rev. Mod. Phys.* **70**, 1–53 (1998); S. A. Balbus, *Enhanced Angular Momentum Transport in Accretion Disks, Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **41**, 555–597 (2003); arXiv:astro-ph/0306208 (June 2003).
4. M i s h o n o v T. M. , Y. G. M a n e v a, Z. D. D i m i t r o v, and T. S. H r i s t o v. *On the theory of MHD waves in a shear flow of a magnetized turbulent plasma, Bulg. Astron. J.* **9**, 51–92 (2007); http:/ /www.astro.bas.bg/AIJ/issues/n9/Mishonov.pdf; arXiv:astro-ph/0507696v5 (July 2005); Y. G. Maneva, B.Sc. Thesis, Sofia University, 2005; Z. D. Dimitrov, M.Sc. Thesis, Sofia University, 2007.
5. M i s h o n o v T. M. , Z. D. D i m i t r o v, Y. G. M a n e v a, and T. S. H r i s t o v. *Amplification of Slow Magnetosonic Waves by Shear Flow: Heating and Friction Mechanisms of Accretion Disks,* arXiv:0903.2386v3; In Space Plasma Physics, Proceedings of the School and Workshop on Space Plasma Physics, 31 August–7 September 2008, Sozopol, Bulgaria, Editor: I. Zhelyazkov, American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings (2009), pp. 28-54.